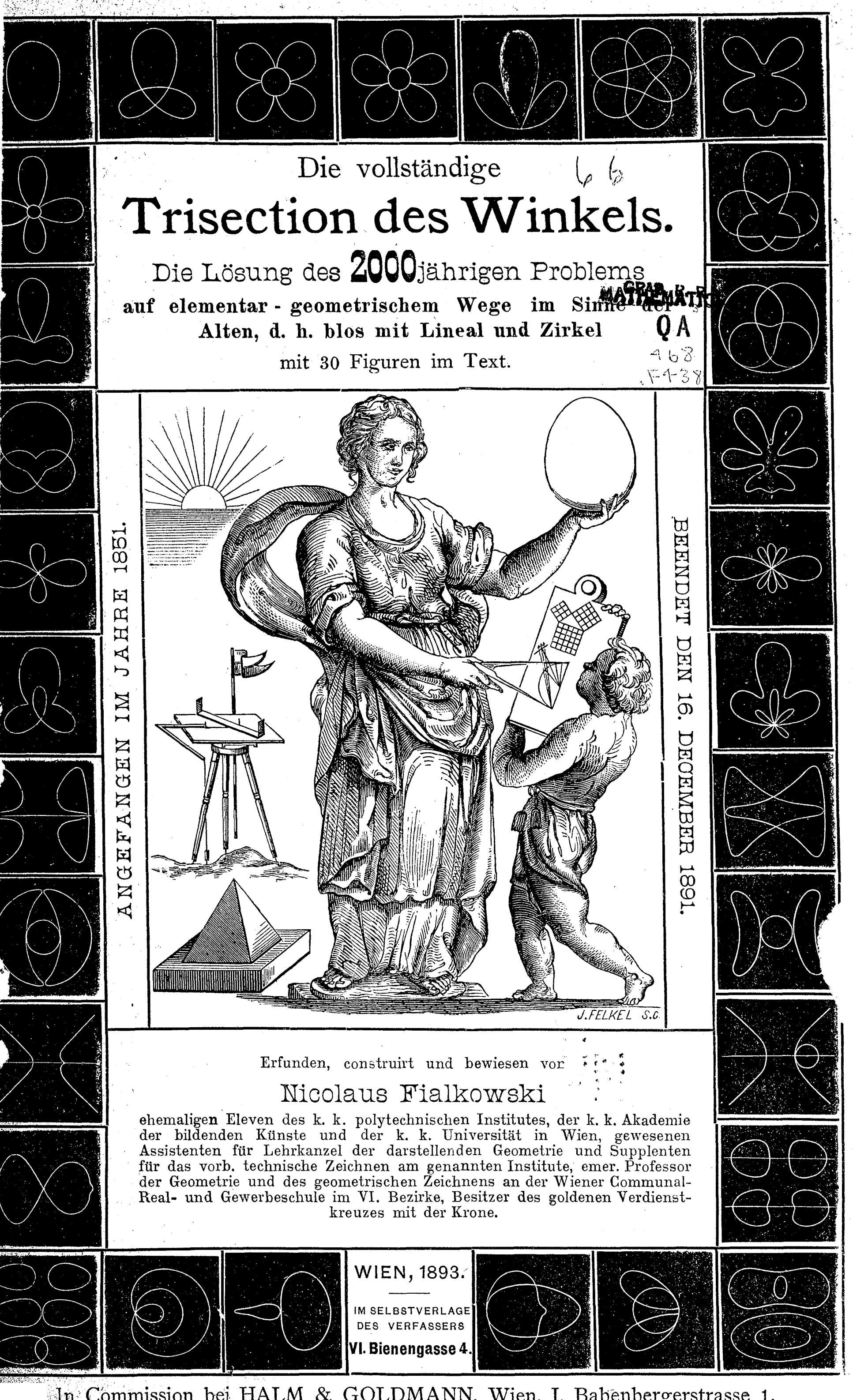
ACV2212
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 09/12/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B37927
035/2: : |a (CaOTULAS)160647706
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Fialkowski, Nicolaus.
245:04: |a Die vollständige Trisection des Winkels. |b Die Lösung des 2000 jährigen Problems auf elementar-geometrischem Wege im Sinne der Alten, d. h. bloss mit Lineal und Zirkel ... |c Erfunden, construiert und bewiesen von Nicolaus Fialkowski.
260: : |a Wien, |b Im Selbstverlage des Verfassers. In Commission bei Halm & Goldmann, |c 1893.
300/1: : |a 25 p., 1 L. |b diagrs. |c 24 cm.
500/1: : |a Illus. t.-p.
650/1: 0: |a Trisection of angle
998: : |c RHJ |s 9124



Die vollständige

Trisection des Winkels.

Die Lösung des **2000**jährigen Problems

auf elementar - geometrischem Wege im Sinne der Alten, d. h. blos mit Lineal und Zirkel

mit 30 Figuren im Text.

Erfunden, construirt und bewiesen von

Nicolaus Fialkowski

ehemaligen Eleven des k. k. polytechnischen Institutes, der k. k. Akademie der bildenden Künste und der k. k. Universität in Wien, gewesenen Assistenten für Lehrkanzel der darstellenden Geometrie und Supplenten für das vorb. technische Zeichnen am genannten Institute, emer. Professor der Geometrie und des geometrischen Zeichnens an der Wiener Communal-Real- und Gewerbeschule im VI. Bezirke, Besitzer des goldenen Verdienstkreuzes mit der Krone.

WIEN, 1893.

IM SELBSTVERLAGE DES VERFASSERS
VI. Bienengasse 4.

In Commission bei HALM & GOLDMANN, Wien, I. Babenbergerstrasse 1.

Preis 3 Kronen = 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

Meinen sämmtlichen Schülern

welche vom Jahre 1841 bis 1888 nach Tausenden zählen, insbesondere meinem ehemaligen ersten Vorzugsschüler,

Herrn



Carl Mautner Ritter von Markhof

k. k. Commercial-Rath, Ritter des Franz Josef-Ordens, Brauerei-Besitzer etc. etc.

gewidmet

in freundlicher und angenehmer Erinnerung

von ihrem ehemaligen Professor

N. Fialkowski

mathematischen Schriftsteller, Erfinder der mathematischen Eilinien, aus welchen die Kegelschnittslinien als specielle Fäl e hervorgehen, des neuen natürlichen Systems krummer Linien, mehrerer einheitlicher Constructionen der Kegelschnittlinien, vieler Krummen höherer Ordnung, des geometrischen Darvinismus in Bezug auf die Descendation, neues Theorems der Kreis- und Winkeltheilung etc. etc.

Vorrede.

Unter der glorreichen Regierung des Kaisers und Königs von Oesterreich-Ungarn

Franz Josef I.

wurde, wie schon das Titelblatt anzeigt, die vollständige Lösung der berühmten historischen, sogenannten Delischen 2000jährigen Aufgabe gefunden, und zwar im Sinne der Alten; dies gibt das Zeugnis, dass unter unserem allgeliebten und hochverehrten Monarchen Künste und Wissenschaften nicht nur blühen, sondern auch vortrefflich gedeihen und herrliche, ja unerwartete und nutzbringende Früchte tragen.

Diese Begebenheit wird in der Mathematik als ein Ereignis darum angesehen werden, weil es durch ihre Beschaffenheit und ihre Folgen insoferne die Aufmerksamkeit auf sich ziehen muss, als das, was die Mathematiker nach 2000 Jahren schliesslich für unmöglich erklärten, jetzt möglich geworden ist, daher ein Paradoxon aufgetaucht ist, welches in den Annalen der Mathematik seines Gleichen nicht hat.

Um nun die gemachte Erfindung auch für Jene nutzbringend zu machen, welche nur die Anfangsgründe der reinen Mathematik studirt haben, beschloss ich, wie bereits geschehen, die Fundamentalsätze, sowie die eigentlichen Constructionen der Trisection, welches zusammen 30 Figuren umfasst, separat zu geben, alles Andere aber, welches in das Gebiet der höheren Mathematik gehört, anszuscheiden und in einem besonderen Hefte nachfolgen zu lassen.

Die Beweise für die Richtigkeit der hier gegebenen Auflösungen sind höchst einfach, daher so gegeben, dass jeder, der nur die Elemente der Geometrie versteht, auch die gegebenen vier- bis fünfzeiligen Beweise verstehen muss.

Es sind hier im Ganzen fünf verschiedene Auflösungen vorhanden, aber bei jeder wird ein neuer axiomischer Satz als Hilfssatz angewendet. Dieser Hilfssatz ist so klar als der Satz: „Zwischen zwei Punkten ist nur eine einzige Gerade, aber unzählig viele Krumme möglich.“

Auf einem solchen Satze, der so deutlich ist, dass man ihn nicht zu beweisen braucht, wurde das Ganze hier so aufgebaut, dass zu jeder der fünf Auflösungen nur vier bis fünf Gerade und ein Kreisbogen benützt werden.

Zur Lösung dieser Aufgabe habe ich 40 Jahre verwendet; tausende und abermals tausende von Constructionen und Rechnungen mussten gemacht werden, um zum Ziele zu gelangen, wie dies schon das im Jahre 1860 nach zehnjähriger, mühevoller Arbeit bei Gerold erschienene Werk über die Theilung des Winkels und des Kreises nachweist, wo unter 47 Arten der Trisection einige bis 90° auf Secunden genau gehen. Bei dieser Arbeit beherzigte ich das gewöhnliche Sprichwort: „Uebung macht den Meister“ aber auch des Spruches von Göthe war ich eingedenk, der diesbezüglich sagt:

Darum übe dich alle Tag,
Und du wirst sehen, was das vermag,
Es kommt dir unter der Hand,
Der dazu nöthige Verstand.

was auch wirklich eingetroffen ist.

Diese Uebungen waren aber nicht so leicht und schnell gemacht; sie erforderten viel Zeit, grosse Mühe und Plage, und eine besondere Ausdauer, da zu jeder neu aufgetauchten Idee zuerst die nöthigen Figuren mit Präcision gemacht werden mussten, nach meinem Spruche: „Zuerst die Figur oder die Person

und dann erst kann man reden davon.“ Also nicht durch Zufall, sondern durch consequentes Verfolgen dieser Aufgabe wurde sie gelöst.

Wir haben den Bestrebungen der Alten dessfalls viele schöne Entdeckungen zu danken, worunter auch die Kegelschnittslinien gehören, und mir ist es, Gott sei Dank, gelungen, nicht nur die 2000jährige Aufgabe zu bewältigen, sondern dabei auch, wie schon die Randfiguren am Titelblatte zeigen, viel Neues und Schönes zu erfinden, wovon manches in einigen meiner 30 bereits veröffentlichten Werke sich vorfindet, vieles aber in meinen Manuscripten enthalten ist, welches auf die Erlösung wartet, wenn sich nämlich ein Verleger dafür findet, was bei uns schwer geht, zumal das mathematische Lesepublicum sehr gering ist; daher kommt es, dass die Buchhändler auf derlei Werke nicht so sehr reflectiren, und das ist auch die Ursache, warum die schon im Jahre 1883 auf der Rückseite meiner Projectionslehre angekündigten fünf Werke bis jetzt noch nicht erschienen sind.

Die hier aufgestellten fünf Methoden sind nicht nur mathematisch richtig, sondern auch recht praktisch. Die IV. Art war schon 1859 gemacht, aber erst am 16. December 1891 war ich mit allen fünf Arten fertig, so dass ich sie der k. k. Akademie der Wissenschaften zur Wahrung der Priorität übergeben konnte.

Indem ich nun das mit vieler Mühe Ersonnene der Oeffentlichkeit übergebe, hoffe ich, dass es das mathematische Lesepublicum mit Beifall aufnehmen werde, zumal da die Auflösung dieser 2000jährigen Aufgabe, an der sich die berühmtesten Mathematiker aller Jahrhunderte versuchten, keine Spielerei war, und ich hoffe wohl, dass dieses Publicum mit dem berühmten deutschen Dichter sagen werde:

„Wer ist Meister? der etwas ersann; Wer ist Gesell'? der etwas kann;
Wer ist Lehrling? Jedermann.“

Ich führe diesen Spruch Göthe's nicht deshalb an, damit man mich für einen Meister halte, denn als solcher bin ich dem mathematischen Publikum durch meine Schriften schon längst bekannt, besonders durch meine constructive Geometrie, welche unter 1800 Figuren über 100 neue Constructionen und darunter auch die erste mathematische Eilinie enthält, sondern deshalb, damit man diese Arbeit lese, würdige und auch den Schülern zum Lesen empfehle, und schlechte Definitionen meide.

So sagt man z. B.: „Die Eilinie ist eine Zusammensetzung aus vier Kreisbögen. In der Geometrie wird sie nicht in Betracht gezogen.“

Das ist aber nicht richtig, denn die Eilinie ist eine mathematische Linie von höherem Grade, und zwar ist sie darum sehr wichtig, weil aus dieser Linie und ihrer Gleichung sämmtliche Kegelschnittslinien als specielle Fälle hervorgehen und damit lässt sich auch der geometrische Darwinismus in Bezug auf die Descendation nachweisen. Ein diesbezügliches Manuscript mit 150 Figuren ist druckfertig.

Ich weiss wohl, dass man sich über diese Arbeit machen und sie bis in die kleinsten Fasern zerzausen werde, um etwa einen Splitter zu finden, aber in der Beziehung habe ich nichts zu befürchten, da das Ganze auf einem einfachen, unumstösslichen Satze aufgebaut ist. Nach Ansicht sachkundiger Männer wäre es wohl im Interesse der guten Sache von Vortheil, wenn sich Männer finden, welche der Wahrheit das Zeugnis geben und dahin wirken, dass von den vielen vorräthigen Manuscripten wenigstens die wichtigsten veröffentlicht werden könnten, so lange ich noch zu wirken im Stande bin, sonst könnte Vieles von dem durch 50 Jahre Aufgehäuften unrettbar verloren gehen, da Vieles nur flüchtig skizzirt ist und daher erst enträthselt werden müsste, was mir wohl leicht ist, aber meinen Nachfolgern vielleicht unmöglich sein wird.

Wien, den 1. Jänner 1893.

Nicolaus Fialkowski
Inventor.

Einleitung.

2000 Jahre sind dahingeschwunden, seit die **zweite Delische Aufgabe** aufkam, und durch 2000 Jahre waren die gröſsten Geometer sowohl des Alterthums als auch der neueren Zeit bemüht, die Lösung dieses schwierigen und berüchtigten, mathematischen Problems zu finden, doch vergebens! Die neuesten Mathematiker wagten sich schon gar nicht an diese Aufgabe, weil sie fürchteten, den Namen eines Stümpers zu bekommen, da man diese Aufgabe für nicht löslich erklärte, wie man dies in den meisten mathematischen Büchern zu lesen bekommt, und man Jeden, der sich daran wagte, für einen Stümper hielt. Bis zum Jahre 1850 war es also keinem Sterblichen gegönnt, die erwähnte Lösung zu finden. Erst in den Jahren 1850 — 1860 finden sich die ersten Spuren der richtigen Lösung dieser, alle bisher bekannten Kräfte der elementaren Geometrie übersteigenden Aufgabe. —

Der Grund des bisherigen Miſslingens liegt nach meiner Ansicht in Folgendem: Betrachtet man die gesammte Mathematik, wie sie jetzt ist, als einen grossen Codex, so ist dieser nicht auf einmal, sondern, wie die Geschichte der Mathematik des 2000jährigen Bestandes nachweist, erst nach und nach entstanden. Der erste war bekanntlich **Euklides**, welcher die zerstreuten Sätze im Lande der Pharaonen sammelte und zu einem ganzen, ordentlichen Codex zusammenbrachte, so daſs dieser, wegen der darin enthaltenen, unumstöſslichen Sätze, welche, so lange die Welt besteht, pure Wahrheiten bleiben, Staunen und Bewunderung erwecken wird.

Man konnte aber nach diesem alten Codex gesetzmäſsig nur das beurteilen, und über das schlieſsen und aus dem folgern, worüber im Codex die Regeln und Gesetze enthalten waren, aber alle diese Sätze reichten nicht hin, um die Trisection des Winkels zu finden. Es war also in dem grossen Codex bis zum Jahre 1850 kein Codicill zu finden, nach welchem man, gehörig angewendet, die 2. Delische Aufgabe bewältigen konnte, daher war es ganz natürlich, daſs die diesfälligen Bestrebungen bei den gröſsten Geometern aller Jahrhunderte fruchtlos sein muſsten.

Erst im Jahre 1851 wurde von mir ein Satz über die Viertheilung des Winkels gefunden, welcher im Jahre 1860 in der 2. Auflage meiner „constructiven Geometrie", so wie in meinem Werke über die „Trisection des Winkels" veröffentlicht wurde.

Dieser Satz über die Viertheilung des Winkels, oder was

dasselbe ist, das Verfahren, an jedem Endpunkte des Bogens 1/4 desselben genau abzuschneiden, und zwar mittels einer einzigen Geraden, wenn die Verlängerung des Schenkels vom Nebenwinkel = dem Halbmesser gemacht ist, bildet den I. Hilfssatz der mathematisch richtigen Trisection eines Winkels, aus welchem der Hauptsatz für die Trisection entstanden ist. Solcher, zur Trisection des Winkels geeigneter Hilfssätze sind im Laufe der Zeit noch 2 hinzugekommen, allein alle 3 reichten noch immer nicht hin, die Trisection des Winkels auf rein „constructivem" Wege auszuführen, sondern sie halfen nur, diese Aufgabe auf mechanischem Wege zu lösen. Da mir aber im Laufe der Zeit von 40 Jahren sehr viel zu entdecken gelungen ist, so war ich bemüht, auch die Construction der Trisection zu vervollkommnen.

Ich stellte die Figur für den 2. Satz mehrmals nebeneinander und bekam auf diese Art den neuen Gedanken, eine gegebene Gerade zwischen 2 oder 3 andere einzuschalten, was ich **Interjiciren** nannte, und so ist der neue, herrliche Satz über die Interjection entstanden, mit dessen Hilfe ich die Trisection, so wie sie hier vorliegt, lösen konnte.

Dieser Satz ist bei der Trisection ein Hauptsatz, also eine „Conditio sine qua non"; denn bei jedem der 3 andern Sätze, woraus 5 Arten der Trisection entstehen, muss er angewendet werden, wenn man zum Ziele gelangen will. Bei jeder der in dieser Abhandlung gegebenen 5 Arten der Trisection werden also stets 2 Sätze angewendet.

Nach diesem obgenannten Hauptsatze über das Interjiciren können auch andere Aufgaben, deren analytische Lösungen auf Gleichungen vom 4ten Grade führen, auf eine höchst einfache Art, also sehr leicht, gelöst werden, wie dies in der Folge wird gezeigt werden.

I. Hilfssatz der Trisection.

Hauptsatz. Zwischen 2 oder 3 gleich lange Gerade von gemeinsamem Träger und 2 bestimmten Endgrenzen kann man beliebig viele Gerade von derselben Länge wie die gegebenen und mit demselben Träger einschalten.
Das Einschalten wird **Interjiciren** und die Eingeschalteten die **Interjectionen** genannt.
Interjiciren kommt vom lateinischen Worte **interjacere** oder **interjicere** u. heißt: dazwischen-stellen, setzen, also auch einzeichnen, einschieben oder auch einschalten, welch' letzteres Wort lateinisch **intercalare** heisst.

Fig. 1.

1.) Ist z. B. N (Fig. 1.) der gemeinsame Träger für die 3 Geraden Nd, Ne, Nf und sind ad, be, cf von den 2 aus N beschriebenen Kreisbögen begrenzt, (wobei zuerst ad = einer gegebenen Länge l gemacht wurde) so kann man zwischen ad u. be, so wie zwischen be u. cf 1, 2, 3 oder n Gerade so einschalten, daß jede der gegebenen Länge, also = l ist, und denselben Träger N hat, weil die Stücke ad, be, cf radial sind. — Hier sind die 2 Endgrenzen aus demselben Mittelpunkte bestimmt; daher müssen die Stücke ad, be, cf, folglich auch mn und pq radial u. einander = sein, weil auch die Strahlen aus demselben Punkte geführt wurden.

Fig. 2.

2.) Sollen aber die Strahlen für die Bestimmung der 2. Grenze aus einem andern, außerhalb N liegenden Punkte P (Fig. 2) gezogen werden, so kann nur eine Grenze gegeben sein, und die 2. muß erst durch das Auftragen der gegebenen Länge der einzuschaltenden Geraden auf 3 Strahlen bestimmt werden. — Ist z. B. gz (Fig. 2) der aus N beschriebene Kreisbogen die 1. Grenze, u. sollen zur Bestimmung der 2. Grenze die Strahlen aus dem Punkte P gezogen werden, so muss die gegebene Länge l auf jedem der 3 Strahlen Ps, Ps', Ps" von a, b, c aus aufgetragen werden, wo dann die 3 Punkte d, e, f Grenzpunkte sind, durch welche ein Kreisbogen gelegt, diesen als 2. Grenze gibt. —

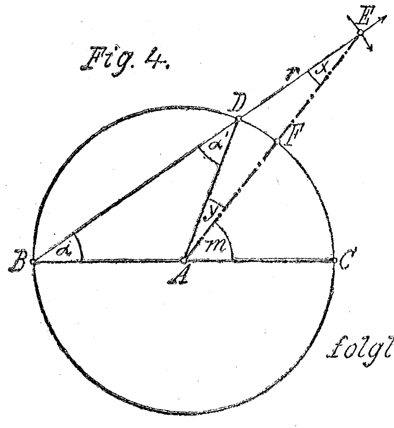
Fig. 3.

3.) Die 1. gegebene Grenze kann auch eine Gerade sein. Ist z. B. die 1. Grenze die Gerade gz (Fig 3), u. sollen die 3 Strahlen Ps, Ps', Ps" vom Punkte P schief gegen gz geführt werden, so trage man auf ihnen von a, b, c aus die gegebene Länge l u. lege wie zuvor durch die 3 so erhaltenen Punkte d, e, f den Kreisbogen df, so ist dieser die 2. Grenze.

4.) Da der Bogen df genau durch die 3 Punkte d, e, f geht, so müssen alle Zwischenpunkte von de u. ef dieselbe Eigenschaft in Bezug auf die 1. Grenze besitzen, wie die 3 Punkte d, e, f selbst, weil der Bogen def der geom. Ort aller Punkte ist, welche, mit P verbunden, zwischen den 2 Grenzen gz u. def Strecken ergeben, welche dieselben Eigenschaften haben, wie die 3 construirten Strecken ad, be u. cf.

II. Hilfssatz der Trisection.

Lehrsatz. Verlängert man bei einem Centri-Winkel die Sehne des Nebenwinkels um den Halbmesser u. führt aus dem so erfolgten Endpunkte dieser Verlängerung eine Gerade nach dem Mittelpunkte A, so schneidet diese von dem gegebenen Bogen u. Winkel den 4. Theil ab.



Voraussetzung. Es sei im Kreise A (Fig. 4) der Winkel CAD gegeben, dessen Bogen CD ist, es sei ferner BD die Sehne des Nebenwinkels, u. deren Verlängerung $DE = r$ gemacht; zuletzt sei E mit A verbunden;

Behauptung: so ist $\sphericalangle x = \frac{1}{4} CAD = \frac{1}{4}(m+y)$.

Beweis. Man hat hier: $AB = AD = DE = r$, daher $\sphericalangle \alpha = \alpha'$ u. $\sphericalangle x = y$; es ist aber

$$\sphericalangle m + y = \alpha + \alpha' = 2\alpha = 2\alpha',\text{ somit}$$

$$\sphericalangle m + y = 2(x+y) = 2 \cdot 2x = 2 \cdot 2y = 4x = 4y,$$

folglich muss $x + y = \frac{m+y}{4}$ sein, w. z. b. w.

Folgesatz. Da $\sphericalangle m + y = 4x$ und $\sphericalangle y = x$ ist, so muss die Differenz $m + y - y = 4x - x$, also $m = 3x$ sein, folglich ist $x = \frac{m}{3}$, daher auch $y = \frac{m}{3}$.

Bemerkung. Hätte man nun ein Mittel, ausserhalb des Schenkels des gegebenen Winkels beim Winkel CAF einen Halbmesser so zu zeichnen, dass der eine Endpunkt desselben in die Verlängerung des Schenkels AF auf FE falle, dagegen der andere auf die Peripherie so zu liegen komme, dass die Verlängerung dieses Halbmessers den Punkt B treffe, welcher zugleich in der Verlängerung von AC liegt, so wäre die Trisection des Winkels auf elementar-geometrischem Wege gelöst.

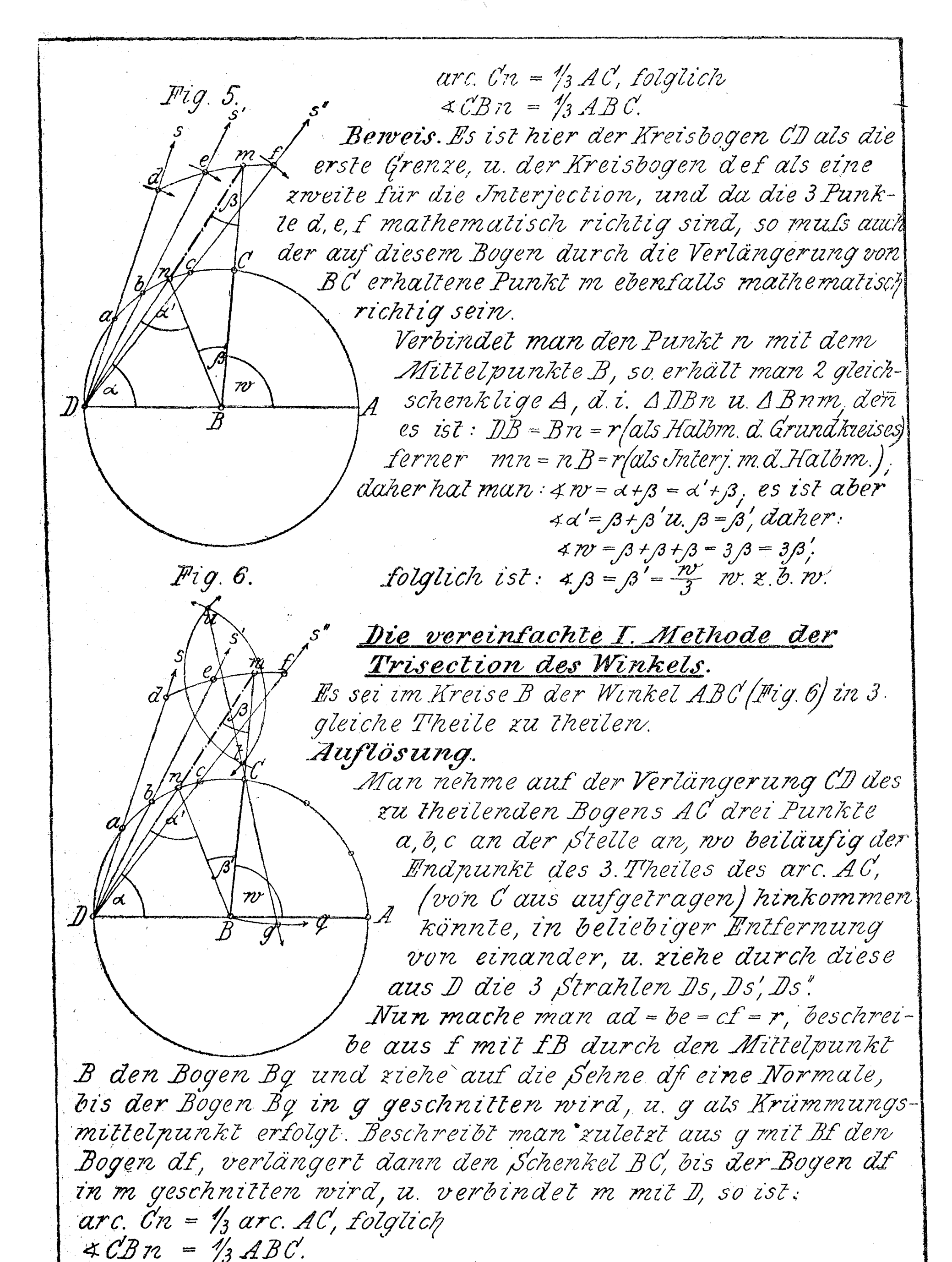
Nun ist dieses Mittel hier im I. Hilfssatze gegeben, u. es ist nur zu zeigen, wie es angewendet wird; dies geschieht auf folgende Art:

Erste mathematisch richtige Trisection des Winkels

im Sinne der Alten, d. h. nur mit Lineal u. Zirkel.

Aufgabe. Es sei ABC (Fig. 5) der zu theilende Winkel u. AC sein Bogen.

Auflösung. Man nehme die Verlängerung des Bogens AC als die 1. Grenze der Interjection an u. bestimme mittels der 3 beliebig an entsprechender Stelle für den Endpunkt eines Drittels angenommenen Punkte a, b, c und der durch a, b, c gezogenen Strahlen Ds, Ds', Ds" die zweite Grenze, indem man auf diesen Strahlen $ad = be = cf = r$ macht. Nun lege man durch die 3 so erhaltenen Punkte d, e, f einen Kreisbogen, verlängere den Schenkel BC des zu theilenden Winkels bis zu diesen Bogen u. verbinde den so erfolgten Punkt m mit dem Strahlenträger D, so hat man:



$\text{arc. } Cn = \frac{1}{3} AC$, folglich
$\sphericalangle CBn = \frac{1}{3} ABC$.

Beweis. Es ist hier der Kreisbogen CD als die erste Grenze, u. der Kreisbogen def als eine zweite für die Interjection, und da die 3 Punkte d, e, f mathematisch richtig sind, so muſs auch der auf diesem Bogen durch die Verlängerung von BC erhaltene Punkt m ebenfalls mathematisch richtig sein.

Verbindet man den Punkt n mit dem Mittelpunkte B, so erhält man 2 gleichschenklige Δ, d.i. ΔDBn u. ΔBnm, denn es ist: $DB = Bn = r$ (als Halbm. d. Grundkreises) ferner $mn = nB = r$ (als Interj. m. d. Halbm.); daher hat man: $\sphericalangle w = \alpha + \beta = \alpha' + \beta$, es ist aber $\sphericalangle \alpha' = \beta + \beta'$ u. $\beta = \beta'$, daher:

$$\sphericalangle w = \beta + \beta + \beta = 3\beta = 3\beta';$$

folglich ist: $\sphericalangle \beta = \beta' = \frac{w}{3}$ w. z. b. w.

Die vereinfachte I. Methode der Trisection des Winkels.

Es sei im Kreise B der Winkel ABC (Fig. 6) in 3 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man nehme auf der Verlängerung CD des zu theilenden Bogens AC drei Punkte a, b, c an der Stelle an, wo beiläufig der Endpunkt des 3. Theiles des arc. AC, (von C aus aufgetragen) hinkommen könnte, in beliebiger Entfernung von einander, u. ziehe durch diese aus D die 3 Strahlen Ds, Ds', Ds''.

Nun mache man $ad = be = cf = r$, beschreibe aus f mit fB durch den Mittelpunkt B den Bogen Bq und ziehe auf die Sehne df eine Normale, bis der Bogen Bq in g geschnitten wird, u. g als Krümmungsmittelpunkt erfolgt. Beschreibt man zuletzt aus g mit Bf den Bogen df, verlängert dann den Schenkel BC, bis der Bogen df in m geschnitten wird, u. verbindet m mit D, so ist:

$\text{arc. } Cn = \frac{1}{3} \text{ arc. } AC$, folglich
$\sphericalangle CBn = \frac{1}{3} ABC$.

Der Beweis wird wie zuvor geführt, wenn n mit B verbunden ist.

Fig. 7.

Am einfachsten ist die Construction diese Art so, wie dies die Fig. 7 zeigt.
Hier hat man nur 5 Gerade u. 2 Bogen gezogen und es ist ∢ ABC genau u. deutlich in 3 gleiche Theile getheilt, auch wurde die Gerade Dk weggelassen, dagegen im Halbierungspunkte l der Bk die lm ⊥ Bk geführt, weil dadurch der Trisectionspunkt m bedeutend deutlicher bestimmt wird, was bei sehr grossen Winkeln, welche grösser als $3\frac{R}{2}$ sind, erforderlich ist.

Nähere Bestimmung der schiefen Schnitte bei der I. Art der Trisection.

Sowohl bei dieser, wie bei jeder andern geometrischen Construction kommen deutliche u. undeutliche (die sogenannten schiefen) Schnitte vor. Hier bei dieser Construction kommen die undeutlichen oder schiefen Schnitte dann vor, wenn die zu theilenden Winkel bedeutend über 90° oder $> \frac{3R}{2}$ sind, wie dies die Fig. 8 zeigt, oder aber auch bei sehr kleinen Winkeln.

Fig. 8.

Soll z. B. ∢ CAD, der > 90° ist, in 3 gleiche Theile getheilt werden, u. man hat die Hilfspunkte a, b, c angenommen, dann die 3 Strahlen Bs, Bs' und Bs" gezogen, die Halbmesser aufgetragen, den Bogen def beschrieben u. s. w. u. zuletzt k mit B verbunden, so wird der Schnitt bei l etwas undeutlich.

Um diesen Punkt deutlich zu bestimmen, halbiere man die Verbindungslinie Ak in m u. errichte in m auf Ak eine Senkrechte bis l, was geschehen kann und darf, weil Δ Akl gleichschenklich ist. Diese Senkrechte gibt nun in der Peripherie den Schnittpunkt l der Bk mit dem Kreise ganz bestimmt u. deutlich.

Mithin ist hier für alle Fälle vorgesorgt, die Schnitte mögen mittels der Interjectionen wie immer ausfallen.

Diese Methode, als die 1. Lösung der Trisection eines beliebigen Winkels im Sinne der Alten scheint wohl auf den ersten Blick complicirt zu sein, allein sie ist es in der That nicht u. besser, als jede Probirmethode, denn hat man die 3 Punkte d, e, f genau bestimmt, so braucht man nicht einmal den Bogen zu beschreiben, und man kann den Punkt k schon mittels eines kleinen Striches sehr schnell finden, wenn man jene 2 Punkte

zwischen welchen die Verlängerung des Schenkels durchgeht, mit einander verbindet.

Fig. 9.

Die wichtigeren Fälle bezüglich der Bestim̄ung der Drittelpunkte.

Bei der Trisection des Winkels nach der I. hier gegebenen Art hat man mehrere wichtige Fälle zu unterscheiden, u. diese sind:

I. Fall, wenn der zu theilende Winkel w sehr klein ist, in welchem Falle man den Bogen def aus dem Scheitelpunkte B mit dem Durchmesser AD beschreibt, weil für solche Winkel die Interjectionen ad, be u. $cf = Cm$ angenommen werden können, wie die Fig. 9 zeigt. Die bestimmte Interjection fällt hier ausserhalb des Schenkels BC.

Fig. 10.

II. Fall, wenn der Winkel $w > 30°$ u. nicht $> 3\frac{3R}{2}$ ist, also von $w = 30°$ bis $w = 135°$, in welchem Falle man den Mittelpunkt für den Bogen def mittels der Normalen auf 2 Sehnen dieses Bogens findet, falls die drei Strahlen Ds, Ds', Ds'' nicht zu weit von einander angenommen wurden; sonst braucht man nur je 2 u. 2 Punkte durch Gerade zu verbinden u. nachzusehen, zwischen welchen 2 Punkten die Verlängerung geht. In diesen beiden Fällen erhält man den Drittelpunkt n auf dem Bogen des Nebenwinkels. (Fig. 10).

In diesem Falle sind auch jene speciellen Fälle begriffen, wo die Theilung auf eine besondere Art mathematisch richtig ist, z. B. die Winkel von 45°, 67½°, 90°, 108° u. dgl. m., deren Dritteln 15°, 22½°, 30°, 36° u. s. w. sind. (Fig. 11 u. 12).

Fig. 11.

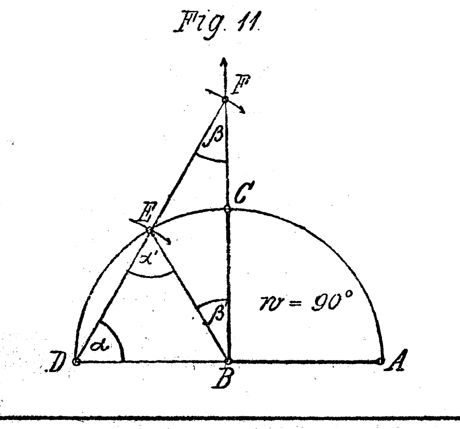


Fig. 12.

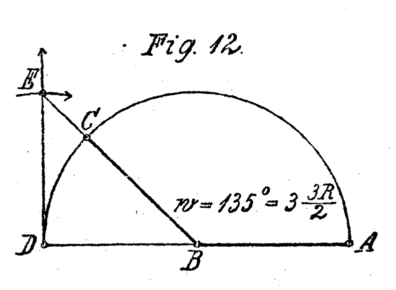


Fig. 13.

III. Fall, wenn der Winkel $w > 3\frac{3R}{2}$ u. kleiner als 240° ist, wo dann die Interjection, da die 3 Strahlen den Kreisbogen sehr schief, also undeutlich schneiden, umgekehrt vorgenommen werden mufs, u. wo der Drittelpunkt n nahe an dem Punkte D oberhalb oder auch unterhalb desselben erhalten wird, wie dies die Fig. 13 zeigt.

IV. Fall, wenn der Winkel $w > 180°$ u. $< 270°$ ist, wo der Drittelpunkt erst durch das Ziehen der Strahlen aus dem Mittelpunkte des Grundkreises erfolgt.

Fig. 14.

In Fig. 14 sind 3 solche Winkel geteilt, daher: 1). $\sphericalangle ABP$, dessen $\frac{1}{3}$ Bogen arc. mP u.
" $\frac{1}{3}\sphericalangle$ der $\sphericalangle mBP$,
ferner 2). $\sphericalangle ABP_1$, dessen $\frac{1}{3}$ Bogen arc. m_1P_1
u. " $\frac{1}{3}\sphericalangle$ der $\sphericalangle m_1BP_1$,
zuletzt 3). $\sphericalangle ABP_2$, dessen $\frac{1}{3}$ Bogen arc. m_2P_2
u. " $\frac{1}{3}\sphericalangle$ der $\sphericalangle m_2BP_2$
ist. Bemerkung. — Da man in diesem letzten Falle die Punkte n, n_1, n_2 wegen der schiefen Schnitte der Linien sehr undeutlich erhält, so ist es besser, wenn man die Winkel, welche grösser als 2R sind, zuerst halbirt, u. eine Hälfte drittelt.

Fig. 15.

Aufgabe. Einen stumpfen Winkel in 3 u. 6 gleiche Theile zu theilen, wenn man ihn zuerst halbirt.

Auflösung. Es sei ABC (Fig. 15) der zu theilende Winkel. Man halbire zuerst den Bogen AC in D u. ziehe die Halbirungslinie über die Peripherie hinaus etwa bis u, setze 2 Punkte auf dem Bogen DC nach dem Augenmafse, um das Drittel der Hälfte des zu theilenden Bogens beiläufig zu bestimmen, übertrage ein solches Drittel auf den Bogen EC u. nehme daselbst die 3 Punkte a, b, c nach dem Augenmafse an. Nun ziehe man aus C die 3 Strahlen Cs, Cs' u. Cs'', trage auf jedem von a, b, c aus den Halbmesser auf u. beschreibe durch die 3 so gefundenen Punkte einen Kreisbogen, oder man verbinde, wenn die Strahlen nahe an einander liegen, nur jene 2 Punkte durch eine Gerade, zwischen welchen die Verlängerung der DE als

Halbirungslinie geht. Hier ist nur d mit e verbunden.
Zieht man zuletzt von dem so auf E u erhaltenen Punkte m nach C gerichtet die Gerade mn, so ist

$$arc.\ En = \tfrac{1}{3}\ CD, \text{ und } \sphericalangle\ Bmn = \tfrac{1}{3}\ CBD,$$

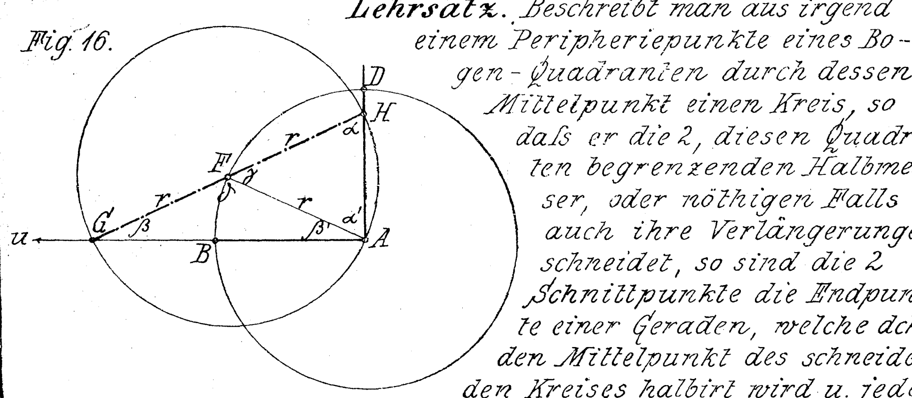
welcher Bogen sich auf AC 6mal auftragen lässt, wodurch also die 3- u. 6-Theilung des Bogens u. Winkels erhalten wird.

Beweis. Verbindet man den Punkt n mit B, so hat man 2 gleichschenklige Δ, in welchen wie zuvor:

$BC = Bn = r$ (als Halbmesser) und
$mn = r$ (als Interjection) ist.

Das Übrige wie zuvor. — Legt man nun an m u. A **das** Lineal an u. macht bei p einen Einschnitt, so hat man:
$arc.\ np = \tfrac{1}{3}\ AC$. (Mathem. richtig).

III. Hilfssatz der Trisection des Winkels im Sinne d. Alten.



Lehrsatz. Beschreibt man aus irgend einem Peripheriepunkte eines Bogen-Quadranten durch dessen Mittelpunkt einen Kreis, so dafs er die 2, diesen Quadranten begrenzenden Halbmesser, oder nöthigen Falls auch ihre Verlängerungen schneidet, so sind die 2 Schnittpunkte die Endpunkte einer Geraden, welche dch. den Mittelpunkt des schneidenden Kreises halbirt wird u. jede Hälfte = r gibt.

Vor. Es sei A (Fig. 16) der Mittelpunkt des mit AB beschriebenen Kreises, in welchem $AD \perp Au$ ist, es sei ferner F der Mittelpunkt des schneidenden Kreises, welcher den Schenkel AD des Quadranten BD in H u. die Verlängerung von AB in G schneidet.

Beh. Es liegen die 2 Stücke GF u. FH in einer Geraden, u. es ist $FG = FH = r$ des Grundkreises.

Bew. Verbindet man den Punkt F mit A u. bezeichnet die Winkel so, wie dies die Fig. zeigt, so hat man:

$$2\alpha + \gamma = 180^\circ \text{ und}$$
$$2\beta + \delta = 180^\circ, \text{ somit}$$
$$2(\alpha + \beta) + \gamma + \delta = 360^\circ; \text{ da aber}$$
$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ ist, so hat man}$$
$$180^\circ + \gamma + \delta = 360^\circ;$$

so mufs auch $\gamma + \delta = 180^\circ$ sein, folglich liegen die 2 Stücke GF u. FH in einer Geraden.

Da ferner die Stücke GF, FA u. FH die Halbmesser desselben Kreises sind, so müssen sie einander gleich sein; folglich ist:

$$GF = FA = FH = AB = r, \text{ w. z. b. w.}$$

Dieser Satz gibt in Verbindung mit dem I. Hilfssatze die II. u. III. Art der Trisection des Winkels im Sinne der Alten.

II. Art der Trisection des Winkels im Sinne der Alten.

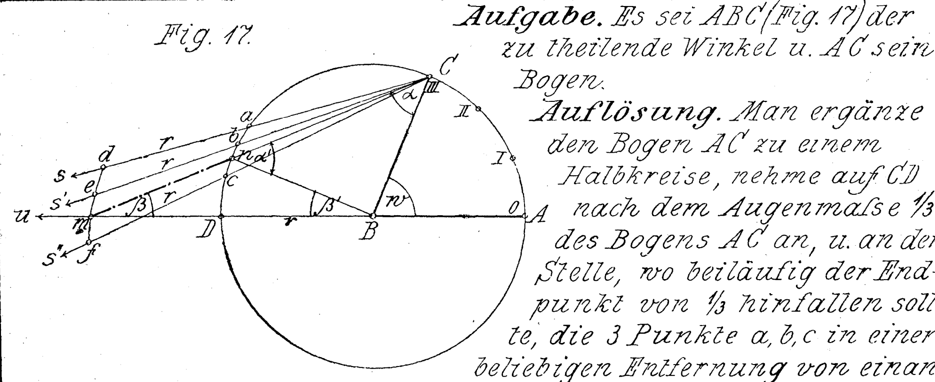


Fig. 17.

Aufgabe. Es sei ABC (Fig. 17) der zu theilende Winkel u. AC sein Bogen.

Auflösung. Man ergänze den Bogen AC zu einem Halbkreise, nehme auf CD nach dem Augenmaße $\frac{1}{3}$ des Bogens AC an, u. an der Stelle, wo beiläufig der Endpunkt von $\frac{1}{3}$ hinfallen sollte, die 3 Punkte a, b, c in einer beliebigen Entfernung von einander an; nun ziehe man aus C durch a, b, c die 3 Strahlen Cs, Cs', Cs'' u. trage von a, b, c aus den Halbmesser auf jedem dieser 3 Strahlen auf, so erhält man die 3 Punkte d, e, f; legt man nun durch d, e, f einen Kreisbogen, so wird dieser die Verlängerung von AB in m schneiden. Verbindet man zuletzt m mit C, so wird der Halbkreis in n geschnitten u. gibt:

$$\text{arc. } Dn = \tfrac{1}{3} \text{ arc. } AC, \text{ folglich}$$

$$\sphericalangle DBn = \tfrac{1}{3} ABC.$$

Beweis. Verbindet man den Punkt n mit B, so hat man, wenn $\sphericalangle ABC = w$ gesetzt wird, u. die übrigen Winkel, wie die Figur zeigt, bezeichnet werden:

$$\sphericalangle w = \alpha + \beta = \alpha' + \beta, \text{ u. da nach der Interjection}$$

$mn = r$ ist, so hat man: $\sphericalangle w = \alpha + \beta = \beta + \beta' + \beta$, also

$$\sphericalangle w = 3\beta = 3\beta', \text{ folglich ist:}$$

$$\sphericalangle \beta = \beta' = \frac{w}{3}, \text{ w. z. b. w.}$$

Bemerkung. Dieses Verfahren ist wohl einfach, aber es hat den Nachtheil, daß man fast um mehr als den Halbmesser über den Kreis hinausgehen muß, daher ist das nachfolgende Verfahren vorteilhafter.

III. Art der Trisection des Winkels im Sinne der Alten.

Fig. 18.

Aufgabe. Einen Winkel ABC (Fig. 18) in 3 gleiche Theile zu theilen; AC sei dessen Bogen.

Auflösung. Man errichte in B die BD ⊥ AB, bestimme auf dem Bogen DE, von E aus gerechnet, nach dem Augenmaße den Endpunkt eines Drittels, wähle dann auf BD **willkürlich, aber** dem Drittel-Endpunkt entsprechend, die 3 Punkte a, b, c und führe durch diese aus C die 3 Strahlen Cs, Cs′, Cs″. Nun trage man auf jedem dieser Strahlen von a, b, c aus den Halbmesser AB (= r) auf, lege durch die 3 so erhaltenen Punkte d, e, f einen Kreisbogen, hier nur die Gerade de, u. ziehe von dem auf der Peripherie erfolgten Schnittpunkte m nach C die Gerade mn, so ist mn ebenfalls gleich dem Halbmesser, und

daher arc. Em = ⅓ arc. AC, folglich

∢EBm = ⅓ ∢ ABC.

Beweis. Um den Beweis zu führen, muß man m mit B verbinden, u. den Strahl Cm bis zur Verlängerung der BE ziehen, so wird man, da BC = Bm ist, u. die Verlängerung des Strahles bis zur verlängerten BE = r sein muß, **den Bew.** wie zuvor führen können.

Bemerkung. Diese Auflösung ist die einfachste von den hier gegebenen, denn man braucht hier faktisch nur 4 Gerade, d. i. eine Senkrechte u. die 3 Strahlen, zuletzt einen Strich statt des Bogens, wenn die Strahlen aus C nicht zu weit aus einander sind. Außer dem Grundkreise ist hier gar kein Hilfskreis erforderlich, auch hat diese Methode den Vorteil, daß man nur ein Wenig über den Kreis hinauszugehen braucht.

IV. Hilfssatz der Trisection des Winkels im Sinne der Alten.

Lehrsatz. Schneidet man bei einem gleichschenkligen Dreiecke aus den beiden Endpunkten der Grundlinie diese mit dem Halbmesser gleich dem Schenkel dieses Dreieckes in 2 Punkten u. verbindet diese 2 Punkte mit der Spitze des gleichschenkligen Dreieckes, so hat man:

a). Innerhalb dieses Dreieckes ein Dreieck, welches mit jedem der 2, durch das Abschneiden bestimmten Dreiecke ähnlich ist;

b). es entstehen 2 Paare congruenter Dreiecke, und

c). es werden auf der Grundlinie an ihren Endpunkten gleiche Stücke abgeschnitten.

Fig. 19.

Vor. Es sei ABC (Fig. 19) ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem $AB = BC$ ist, ferner sei $AE = AB$, sowie $CD = BC$ gemacht, und D so wie E mit B verbunden.

Beh. so ist: 1). $\Delta BDE \sim \Delta ABE \sim \Delta BCD$,
2). $\Delta 1 \cong \Delta 2$,
3). $\Delta ABE \cong \Delta BDC$ und
4). $AD = CE$, somit $AE = CD$.

Bew. Es ist in den 2 Dreiecken ABE u. BCD:
1). $AB = BC$ (n. d. Vor.)
2). $AE = CD = AB = BC$ (n. d. Constr.)
3). $\sphericalangle \alpha = \alpha'$ (n. d. Vor.)

daher ist $\Delta ABE \cong BCD$, daraus folgt:
$BD = BE$, somit
$\sphericalangle w = w'$. es ist aber
$\sphericalangle w = w' = \gamma + \delta = \gamma' + \delta$ (als Winkel an d. Grundlinie),
somit ist auch $\sphericalangle \gamma = \gamma'$ und
$\sphericalangle \beta = \beta'$, folglich ist
$\Delta 1 \cong \Delta 2$, da aber
$\sphericalangle w = w' = \gamma + \delta = \gamma' + \delta$ ist, so sind die 3 neuentstandenen Δ ähnlich, also: $\Delta BDE \sim \Delta ABE \sim \Delta BCD$, folglich muſs
$\sphericalangle \delta = \alpha = \alpha'$ sein (als Winkel an der Spitze.)

Beschreibt man nun aus A mit dem Halbmesser AB den Bogen BEF, bis die Verlängerung von BD in F getroffen wird, so hat man, da $\sphericalangle \alpha = \delta$ ist, u. wegen ε als Centri- u. $\sphericalangle \delta$ als Peripheriewinkel:
arc. $BE = \frac{1}{2}$ arc. EF sein muſs,
2 arc. BE = arc. EF, addirt man dazu
arc. BE = arc. BE, so folgt:
3 arc. $BE = EF + BE$, oder
3 arc. BE = arc. BF, folglich muſs
arc. $BE = \frac{1}{3}$ arc. BF, u. daher
$\sphericalangle \alpha = \frac{1}{3} BAF$ sein.

Solcher Dreiecke, wie das Dreieck ABC sind in einem Halbkreise unzählig viele möglich, wie dies die Fig. 20 zeigt.

Fig. 20.

Hätte man nun ein Mittel, den Punkt C (Fig. 19) zu finden, so daſs, wenn C mit A verbunden wird, $BD = BE = \frac{1}{3} BF$ ist, so wäre die Trisection gelöst. Ein solches Mittel ist auch hier der 1. Satz, wie das Nachfolgende zeigt.

Fig. 21.

Das Dreifache eines Winkels artificiell zu zeichnen.

Man kann wohl das Dreifache eines Winkels ganz einfach dadurch zeichnen, dafs man den Bogen 3mal aufträgt; aber dabei kommt man nicht auf die Eigenschaften des Dreifachen, die man zur Trisection braucht, u. die das „artificielle" oder künstliche Dreifache liefert. Das künstlich construirte Dreifache erhält man auf folgende Art:

Construction u. Beweis.

Es sei $\sphericalangle ABM = \alpha$ (Fig. 21) ein einfacher Winkel. Man ziehe mittels des über AB beschriebenen Halbkreises (III. Art d. Bisection, pg. 25, Fialkowski's „Theilung des Winkels," Wien 1860) von A aus die $AG \perp BM$ u. verlängere sie bis zur Peripherie in N, so hat man, wenn N mit B verbunden wird, in den 2 Dreiecken ABG u. GBN:

1). $AB = BN$ (als Halbmesser desselb. Kr.)
2). $GB = GB$ (= sich selbst) und
3). $\sphericalangle R = R' = 90°$ (n. d. Constr.), folglich ist:

$\Delta ABG \cong \Delta GBN$, daher $\sphericalangle \alpha = \alpha'$, somit auch:
arc. AM = arc. MN.

Nun mache man $GE = GM$ u. ziehe AE, so hat man in den 2 Dreiecken AGM u. AGE:

1). $GE = GM$ (n. d. Construction)
2). $\sphericalangle R = R' = 90°$ (n. d. Construct.) und
3). $AG = AG$ (= sich selbst), folglich mufs

$\Delta AGM \cong \Delta AGE$ sein, daraus folgt: $\sphericalangle p = p'$.

Verlängert man nun den Schenkel AE bis F, so mufs wegen $\sphericalangle p = p'$ als Peripheriewinkel arc. NF = arc. NM sein; da aber auch arc. AM = arc. NM ist, so mufs arc. AM = arc. NF sein; folglich ist arc. AF das Dreifache vom arc. AM.

Construction, welche aus obiger Darstellung auf künstlichem Wege folgt.

Man fälle aus dem Peripheriepunkte des einen Schenkels vom einfachen Winkel ABM auf den 2. Schenkel eine Senkrechte u. verlängere sie bis zur Peripherie, übertrage dann den **sinus vers.** auf die andere Seite, u. lege zuletzt durch den so erhaltenen Punkt aus jenem Punkte, aus dem man die Senkrechte gefällt hat, eine Gerade bis zur Peripherie, so hat man arc. AF als das Dreifache vom arc. AM.

Bemerkungen. 1). Dieses Verfahren in Verbindung mit der Interjection gibt uns ein Mittel an die Hand, die Trisection auf die IV. Art im Sinne der Alten auszuführen.
2). In dieser Construction ist auch der vorhergehende Lehrsatz enthalten, wenn man die BM über M hinaus verlängert; u. die Verlängerung = BE macht.

IV. Art der Trisection des Winkels im Sinne der Alten.

Aufgabe. Es sei ABC (Fig. 22) der zu theilende Winkel u. AC sein Bogen.

Fig. 22.

Auflösung. Man nehme auf der Sehne AC 3 Punkte ungefähr an jener Stelle an, durch welche, aus B die 3 Strahlen gezogen, auf dem Bogen AC ungefähr $\frac{1}{3}$ AC bestimmt wird. Nun trage man auf jedem der 3 Strahlen von der Sehne aus den Halbmesser AB auf, so erhält man die 3 Punkte d, e, f. Legt man ferner durch d, e, f einen Kreisbogen df (hier nur den Strich de), so schneidet dieser den Kreis aus A im Punkte m, u. verbindet man zuletzt m mit B durch eine Gerade, so schneidet diese den Bogen AC so, daſs Ap = $\frac{1}{3}$ AC, folglich $\sphericalangle ABp = \frac{1}{3} ABC$ wird.

Beweis. Beschreibt man durch die 3 Punkte d, e, f einen Kreis, so wird dieser den Hilfskreis aus A in einem Punkte, hier in m, schneiden, welcher Punkt mit B verbunden, den Punkt n auf der AC gibt, u. da ad = be = cf = r ist, so muſs auch mn = r sein, demnach wird der Beweis wie folgt geführt:
Es ist nach der Interjection, wenn m mit B verbunden wird, mn = Bp, u. in diesem Falle hat man, wenn man Ap zieht:

$\Delta ABp \cong mAn$, von welchen jedem
$\Delta Apn = Apn$ abgezogen, gibt:
$\Delta ABn \cong Amp$ u. s. w. also alles so, wie im IV. Hilfssatze, folglich muſs arc. Ap = $\frac{1}{3}$ arc. AC sein.

Bemerkung. Da man zu keiner dieser 4 Trisections-Methoden irgend eine krumme Linie zuerst zu zeichnen braucht, und höchstens nur den Kreis durch die 3 Punkte d, e, f zu führen hat, obwohl auch diesen der Kreisbogen def vertritt, so kann man diese Lösungen als mathematisch-richtige im Sinne der Alten ansehen, denn es wurde bei keiner der 4 Methoden zuerst eine Kegelschnittslinie oder irgend eine andere krumme Linie construirt, obschon die so bestimmten Punkte in einer Curve liegen, u. zwar bei 3 Methoden in einer Bispirale, u. bei einer in einer Ellipse.

V. Art der Trisection des Winkels im Sinne der Alten.

Aufgabe. Es sei CAD (Fig. 23) der zu theilende Winkel u. CD der ihm entsprechende Bogen.

Auflösung. Man suche zuerst nach dem II. Hilfssatze den 4. Theil des Bogens u. Winkels, u. ziehe die AE bis G; so hat man dadurch den ∢ BAH, welcher dem gegebenen ∢ w = ist, in die 2 Theile u und v zerlegt, u. es ist nach dem obgenannten 2. Satze:

$$u = 3\beta = 3\beta' \ldots \ldots \ldots \ldots 1).$$

Um nun den Winkel zu finden, welcher der 3. Theil von v ist, interjicirt man von H gegen den Punkt E hin auf GE, dadurch findet man den Punkt m, welcher mit H verbunden, die Interjection $mn = r$ gibt. Verbindet man nun den Punkt n mit A, so hat man:

Fig. 23.

$$v = \gamma + \delta = \delta + \delta + \delta, \text{ also ist: } v = 3\delta = 3\delta' \ldots \ldots \ldots 2).$$

Addirt man nun 1). u. 2)., so hat man:

$$u + v = 3\beta + 3\delta' = 3(\beta + \delta'); \text{ da aber } u + v = w \text{ ist,}$$

so folgt: $w = 3(\beta + \delta')$, somit ist:

$\beta + \delta' = \frac{w}{3}$. Faſst man nun die Bögen der 2 Winkel β u. δ' in Zirkel, so hat man:

$$\text{arc. } Dn = \tfrac{1}{3} \text{ arc. } CD.$$

Bemerkungen. 1). Dieses Verfahren ist abgeleitet aus der XXVI. Methode der Trisection des Winkels, welche man in des Verfassers Werke über die Theilung des Winkels vom Jahre 1860, pag. 129, Fig. 92, 93, 94 u. 95 findet, und hat den Vortheil, daſs man bei kleinen Winkeln von 0° bis etwa 40° das Drittel ziemlich genau auch ohne Interjection sehr schnell finden kann, indem man nur den Pkt. F sucht u. mit dem entsprechenden Endpunkte der einen Schenkelverlängerung in der Peripherie verbindet.

2). Wie aus der obgenannten XXVI. Methode der Trisection hervorgeht, betragen, wenn nicht interjicirt wird, die Fehler bei ∢ n von 0° bis 30° nur Secunden; erst bei 30° ist der Fehler 0° 1' 22". Interjicirt man aber, so fallen diese Fehler gänzlich weg.

Allgemeine Winkeltheilung.

Weiſs man einmal die Zwei- und Dreitheilung, so liegt die Frage nahe, ob es nicht möglich wäre, auch die 5-, 7-, 11-, 13- und Mehrtheilung auf ähnliche Art wie die oberen 2 Theilungen vorzunehmen. So leicht u. einfach ist die Sache nicht, u. obschon ich ziemlich viel Zeit damit verbracht habe, so habe ich dies nicht so wie bei der Trisection mit einer Interjection = dem Halbmesser r gefunden. Allein es hat sich eine allgemeine, hier folgende Construction ergeben.

Fig. 24.

Es sei ABC (Fig. 24) der gegebene Winkel, welcher in 5 gleiche Theile geteilt werden soll; AC wäre sein Bogen, welcher zum Halbkreis ergänzt den Punkt D gibt. — Man trage eine beliebige Einheit auf dem Bogen AC u. nötigen Falls auch auf dessen Verlängerung um 1 mehr als der zu theilende Bogen Theile erhalten soll, also $n+1$ mal, auf, ziehe dann aus dem Scheitelpunkte B durch den 5. Theilungspunkt eine Gerade, u. aus dem Punkte D durch den 6. Punkt eine zweite, bis die erstere geschnitten ist, so ist die Strecke 6-6 auf dem Strahl D6 die wahre Länge der Interjection für die 5-Theilung des Bogens A5. —

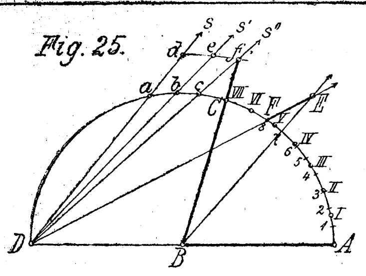
Nimmt man nun den aus D durch 6 gezogenen Strahl als den ersten, aber als mittleren für die 3 Hilfspunkte a, b, c an, zieht auch durch die 2 übrigen die Strahlen, macht dann $ad = be = cf = 6\text{-}6$, legt durch d, e, f einen Bogen, u. verlängert den Schenkel BC bis zu dem Bogen def, hier bis m, führt zuletzt aus m durch D eine Gerade bis zum Kreisbogen in n, so ist mn die annähernde Interjection, und arc. Cn der 5. Theil des Bogens AC, folglich

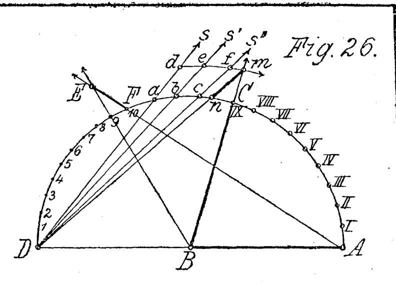
$$\sphericalangle CBn = \tfrac{1}{5} \sphericalangle ABC.$$

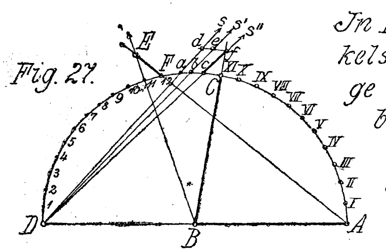
Denn es ist be oder 6-6 die Interjection für den Bogen A5, so daß dann 5-6 der 5. Theil von A5 sein muss, und da n nicht zu weit von 5 liegt, u. def ein Kreisbogen ist, so müssen auch die Interjection mn, folglich auch arc. Cn richtig sein.

Da man bei einer grösseren Anzahl Theile, z. B. bei 13, 15, 17, 19 u. s. w. nicht so leicht den einen Theil nach dem Augenmaße bestimmen kann, so ist es in einem solchen Falle notwendig, an der betreffenden Stelle mehr als 3 Punkte, also auch mehr als 3 Strahlen anzunehmen, und nur diejenigen 2 Punkte der Strahlen der 2. Grenze mit einander zu verbinden, zwischen welchen die Verlängerung des Schenkels vom zu theilenden ∢ durchgeht. Wird aber ein Bogen als 2. Grenze für die Interjection gezeichnet, so ist dies allein schon hinreichend, den Interjectionspunkt genau zu bestimmen, sobald man den Bogen entsprechend verlängert. Man kann aber mittels einer Interjection die betreffende Stelle controlliren.

Im Allgemeinen ist hier zu bemerken, daß die Interjectionslinien um so kleiner werden, je weiter man mit der Anzahl der Theile geht, d. h. je größer die Anzahl der Theile wird. Es nähern sich die Punkte mehr u. mehr dem Kreise ohne Ende fort, ohne ihn je zu erreichen. —







In Fig. 25 hat man die 7-Theilung des Winkels ABC, wobei die mathematisch-richtige Interjection, das Stück EF, auf demselben Bogen zuerst bestimmt wurde, um es auf den 3 Strahlen Ds, Ds' und Ds" interjiciren zu können. Da hier die Interjection fast genau auf Ds" und die Verlängerung von BC in f trifft, so ist $Cc = \frac{1}{7}$ arc. AC. — Der Deutlichkeit wegen kann das Aufsuchen der Interjection auf der andern Seite vorgenommen werden.

In Fig. 26 ist der ∢ ABC in 9 gleiche Theile auf dieselbe Art getheilt, indem man EF, die zu verwendende Interjection, zuerst links bestimmt hat.

In Fig. 27 hat man den ∢ ABC in 11 gleiche Theile getheilt. Hier ist die richtige Länge der Interjection ebenfalls auf der entgegengesetzten Seite links in EF zuerst bestimmt. Dies geschieht aus dem Grunde, damit der zu theilende Bogen nicht zu sehr mit den Zirkelspitzen zerstochen werde, was bei allfälligen Correcturen sehr leicht, selbst bei dem feinsten Auftragen geschieht. — Man sollte daher auf diese Art jedesmal, besonders bei einer grossen Anzahl Theile vorgehen.

Nun hat man eine höchst einfache, praktische Methode, jeden Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, womit ich diese Abhandlung schliesse, um ein anderes, neues Theorem der Winkeltheilung auszufertigen.

Bemerkung bezüglich des Schnittpunktes auf dem Trisectionsbogen.

Deutliche Durchschnittspunkte der Linien überhaupt sind bei geometrischen Constructionen von Wichtigkeit, also besonders bei der Theilung der Winkel und Kreise, vornehmlich aber bei der Construction der Polygone, weil hier der Fehler sich um so mehr vervielfacht, je grösser die Seitenzahl des Polygons ist.

Bezüglich des Schnittes der Verlängerung des Schenkels von dem zu theilenden Winkel auf dem durch 3 Punkte und 3 Strahlen bestimmten Bogen, hat man 2 Fälle zu unterscheiden:

I. Fall, wenn dieser Punkt innerhalb der 3 Punkte des Bogen fällt.

II. Fall, wenn er außerhalb derselben erhalten wird.

Zu I. Fällt der Punkt, den die Verlängerung des Schenkels vom zu theilenden Winkel mit dem Bogen gibt, innerhalb der 3 Punkte, so hat man nur den so erfolgten Punkt mit dem Mittelpunkte des Grundkreises zu verbinden, um den Drittelbogen zu erhalten.

Zu II. Fällt dagegen dieser Schnittpunkt außerhalb der 3 Punkte des Bogens, so muß man auf der Seite, wohin der Schnittpunkt fällt, noch einen 4. Punkt bestimmen, und durch diesen und 2 benachbarte Punkte abermals einen Kreisbogen legen, woraus sich sogleich ergibt, ob der bestimmte Punkt richtig ist oder nicht.

Dem Allem kann man dadurch ausweichen, daß man nach dem Augenmaße an der betreffenden Stelle so genau als möglich den Punkt für $\frac{1}{3}$ bestimmt, also auf's Gerathewohl, aber mit Bedacht setzt, und erst dann durch diesen und zwei an beiden Seiten gesetzten Punkte die drei Strahlen zieht.

Mechanisches, mathematisch richtiges Verfahren der Trisection der Winkel.

Dieses Verfahren wurde aus dem I. Hilfssatze der Trisection des Winkels abgeleitet, und besteht in Folgendem:

Fig. 28.

Es sei im Kreise A (Fig. 28) der ∢ CAD in 3 gleiche Theile zu theilen. Man verlängere den Schenkel AD über D hinaus, trage auf einem Papierstreifen ss den Halbmesser AB so auf, daß ab = AB = = r ist, lege dann die Kante dieses Streifens an B an u. schiebe denselben, um B drehend, nach vorwärts so weit, daß gleichzeitig der Punkt a auf die Peripherie, dagegen b auf die Verlängerung von AD fällt, also ab nach a′b′ zu liegen kommt, so hat man, wenn a′ mit A verbunden wird,

$$\sphericalangle Ab'B = \tfrac{1}{3} w.$$

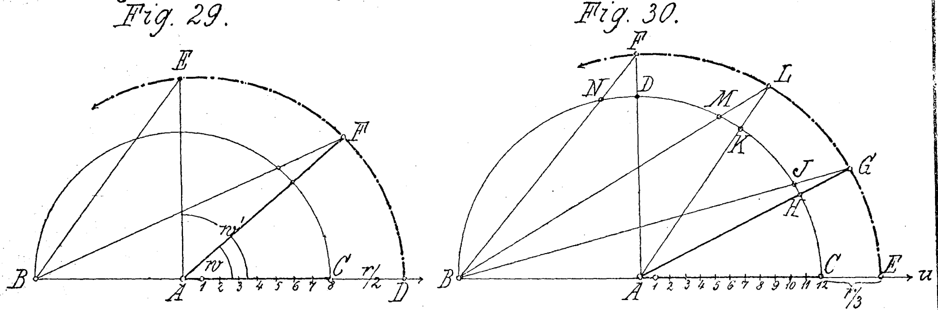
Da ∢ CAD beliebig angenommen wurde, so gilt dieses Verfahren allgemein.

Beweis. Verbindet man den Punkt a′ mit A, so hat man, da $Aa' = AB = ab$ ist, 2 gleichschenklige △, d. i. ABa' u. $Aa'b'$, u. daraus folgt: $\sphericalangle w = \alpha + \beta$; da aber $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ ist, so hat man:

$$\sphericalangle w = \beta + \beta + \beta = 3\beta = 3\beta'; \text{ folglich muß}$$
$$\sphericalangle \beta = \beta' = \frac{w}{3} \text{ sein.}$$

Bemerkung. Dieses neue, mechanische Verfahren unterscheidet

sich von dem alten, durch die Griechen erfundenen, dadurch, daſs beim neuen das Lineal oder der Papierstreifen den Endpunkt des Durchmessers als fixen Punkt für die Drehung hat, und daſs dieser fixe Punkt für jeden Winkel gleiche Geltung haben muſs.



Substitutionsbogen für die **5-Theilung der Winkel.**

Man trage auf einem Schenkel des zu theilenden Winkels, hier auf AC (Fig. 29), eine beliebige Einheit 8mal auf u. beschreibe aus A mit A-8 einen Halbkreis, verlängere AC über C hinaus um den halben Halbmesser, u. beschreibe aus 1 mit 1-D den Viertelkreis DE, so ist dieser der 5-Theilungsquadrant für jeden Winkel bis 90°.

Soll nun irgend ein Winkel, z. B. ∢ DAF in 5 gleiche Theile getheilt werden, so verbinde man den Punkt F mit B, und man hat ∢ AFB = $\frac{1}{5}$ DAF. — Ebenso ist ∢ AEB = $\frac{1}{5}$ DAE u. s. w. Dieser Bogen gilt bis zu einem Winkel von 112°. — Will man aber einen stumpfen Winkel in 5 =e Theile theilen, so muſs man ihn zuerst halbiren, die Hälfte theilen und das gefundene Fünftel doppelt nehmen.

Substitutionsbogen für die **7-Theilung der Winkel.**

Man trage auf einer Geraden, hier auf Au (Fig. 30), eine beliebige Einheit 12mal auf, errichte in A die AD⊥AC, verlängere AC um $\frac{1}{3}$ derselben, setze in dem 1. Theilungspunkte (1) der AC ein und beschreibe mit AE (= 11+4 Einheiten) den Bogen EF, so ist dieser der 7-Theilungsbogen.

Soll nun irgend ein Winkel, z. B. ∢ CAG in 7 gleiche Theile getheilt werden, so verbinde man G mit B, wodurch HJ = = $\frac{1}{7}$ CH erfolgt. Ebenso ist arc. KM = $\frac{1}{7}$ arc. CK, arc. DN = $\frac{1}{7}$ CD u. s. w., bis zu einem Winkel von 90° giltig.

Dies ist wohl eine approximative, aber sehr genaue Construction.

Anwendung.

A. Ohne viel zu suchen, hat man sogleich eine Anwendung, wenn man ein reguläres Neuneck construirt, weil hier das wichtigste ist, den Bogen von 60° oder den von 120°, die man construiren kann, in 3 gleiche Theile zu theilen; daraus folgt

Die erste mathematische Construction des regulären Neuneckes.

Construction. Man zeichne in einem Kreise den Bogen von 60°, theile diesen in 3 gleiche Theile und nehme, da $360 : 9 = 40°$ ist, die Sehne von 2 Dritteln dieses Bogens als Seite des regulären Neuneckes. Oder: Man zeichne in einem Kreise den Bogen von 120°, theile diesen in 3 gleiche Theile, so ist die Sehne des Drittelbogens die Seite des regulären Neuneckes.

Anmerkung. Bis jetzt construirte man dieses Polygon so, dass der Bogen 39° 53′ 46″ hatte; welches von 40° abgezogen, 6′ 14″ gibt; daher 9mal genommen der Fehler 58′ 6″, also beinahe 1° entsteht.

B. I. Da man jeden Winkel in 3 gleiche Theile theilen und den Winkel von 3 Grad construiren kann, so wird man auch die Winkel von Grad zu Grad zeichnen können.

II. Man kann jeden Winkel von 2 und 4 Grad zeichnen, weil man den Winkel von 6° in 3 gleiche Theile theilen kann.

III. Ebenso kann man die Winkel von 7°, 8°, 9°, 10° und 11° zeichnen, weil $7=4+3$, $8=4+4$, $9=3+3$, $10=4+6$, $11=1+10$ ist u. s. w., wobei man die Zerlegung auf eine beliebige Art vornehmen kann, so z. B.

$2=1+1$	$6=2+2+2=3+3$
$3=2+1$	$7=3+4=3+3+1$
$4=2+2=1+3$	$8=4+4=3+3+2$
$5=1+4=2+3$	u. s. w

Alle diese Winkel lassen sich sehr genau dann construiren, wenn in einem grossen Massstabe gezeichnet wird.

C. Daraus folgt die Construction jener regulären Polygone, wo der Factor 3 vorkommt, also

ein	reguläres	9	Eck	wegen	3.3
„	„	15	„	„	3.5
„	„	18	„	„	3.6
„	„	21	„	„	3.7 u. s. w.

Schlussbemerkung. Wie jene Polygone construirt werden, deren Zahlen Primfactoren sind, z. B. 7-, 11-, 13-, 17-Eck u. s. w., darüber ist eine separate Abhandlung druckfertig unter dem Titel: „Neues Theorem der Kreis- und Winkeltheilung“, wo die Zerlegung in Summaden und das Verhältniss der Bögen die Hauptrolle spielen.

Ende.